

# ALIRAN GAYA NORMAL AKIBAT BEBAN SUHU DENGAN MENGGUNAKAN HUBUNGAN ELASTOMEKANIS YANG MENINJAU KOEFISIEN PERPINDAHAN PANAS LAMINAT

**Darwin Sebayang**

*Lembaga Penerbangan dan Antariksa Nasional (LAPAN)*

*Jl. Pemuda Persil 1, Jakarta*

## ABSTRAK

**ALIRAN GAYA NORMAL AKIBAT BEBAN SUHU DENGAN MENGGUNAKAN HUBUNGAN ELASTOMEKANIS YANG MENINJAU KOEFISIEN PERPINDAHAN PANAS LAMINAT.** Hubungan elastomekanis merupakan salah satu persamaan yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan silinder. Di sini diturunkan persamaan elastomekanis yang meninjau koefisien perpindahan panas. Hal ini berguna untuk mempermudah perhitungan gaya dalam akibat beban termis. Untuk meneliti kesahihan hubungan elastomekanis tersebut maka hasil yang diperoleh dibandingkan dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan hubungan elastomekanis konvensional.

**Kata kunci :** aliran gaya normal, elastomekanis, koefisien perpindahan panas laminat.

## ABSTRACT

**THE FLOW OF NORMAL FORCE RESULTED FROM TEMPERATURE LOAD BY USING ELASTOMECHANICS RELATION WHICH REFERRED TO LAMINATE HEAT TRANSFER COEFFICIENT.** The elastomechanics (relation between stress and strain) is on of the equation, which is important equation to solve the cylinder equation. Herewith the elastomechanics equation which included the heat transfer coefficient will be derivated. It is used to calculate the internal stress due to the thermal load simpler. The validation of this new elastomechanics relation will be proofed by comparing the results using this elastomechanics and the result using the conversional relation.

**Key words :** Flow force normally, elastomechanics, heat transfer coefficient of laminate

## PENDAHULUAN

Suatu struktur dinamakan Laminat bila struktur tersebut terdiri dari dua atau tiga lapis, yang tersusun dari harga sifat elastisitas yang berbeda. Untuk menghitung tegangan pada laminat selalu digunakan teori kontinum. Skema metode perhitungan dengan memperhitungkan beban termis [1,2,3]. Di sini ditinjau hubungan elastomekanis yang memisahkan pengaruh beban mekanis dan beban termis. Di sini dicoba diturunkan suatu hubungan elastomekanis yang menggunakan koefisien perpindahan panas laminat.

## METODOLOGI DAN TEORI

### Definisi Aliran Gaya dan Aliran Momen

$$N_x = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x_k} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz$$

$$N_\theta = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\theta_k} dz$$

$$N_{x\theta} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{x\theta_k} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (3)$$

$$N_{\theta x} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{\theta x_k} dz \quad (4)$$

$$Q_x = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{xz_k} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \quad (5)$$

$$Q_\theta = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{\theta z_k} dz \quad (6)$$

Momen penampang atau aliran Momen:

$$M_x = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{x_k} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (7)$$

$$M_\theta = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \sigma_{\theta_k} z dz \quad (8)$$

$$M_{x\theta} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{x\theta k} \left(1 + \frac{z}{R}\right) z dz \quad (9)$$

$$M_{\theta x} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{\theta x k} z dz \quad (10)$$

## Hubungan Kinematik

Perubahan bentuk penampang tengah dengan kondisi tidak berubah bentuk berbunyi sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{v_{,\theta} + w}{R} \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{u_{,\theta}}{R} + v_{,x} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Untuk kelengkungan permukaan tegangan akibat perubahan akibat lentur dalam arah memanjang  $\kappa_x$ , perubahan bentuk dalam arah tegak lurus  $\kappa_\theta$  dan perubahan bentuk akibat torsi  $\kappa_{x\theta}$ . Dalam hal ini diambil kelengkungan permukaan berdasarkan *Donnel-Muchitari-Vlasov* [4]:

$$\left. \begin{aligned} \kappa_x &= \beta_{x,x} \\ \kappa_\theta &= \frac{\beta_{\theta,\theta}}{R} \\ \kappa_{x\theta} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\beta_{x,\theta}}{R} + \beta_{\theta,x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

## Persamaan Kesetimbangan

- Persamaan kesetimbangan aliran gaya dalam arah x:

$$N_{x,x} + \frac{N_{x\theta,\theta}}{R} = p_x \quad (13)$$

- Persamaan kesetimbangan aliran gaya dalam arah  $\theta$

$$N_{x\theta,x} + \frac{N_{\theta,\theta}}{R} + \frac{Q_\theta}{R} = p_\theta \quad (14)$$

- Persamaan kesetimbangan aliran gaya dalam arah z:

$$\frac{N_\theta}{R} - Q_{x,x} - \frac{Q_{\theta,\theta}}{R} = p_r \quad (15)$$

- Kesetimbangan momen terhadap sumbu x:

$$Q_x - M_{x,x} - \frac{M_{x\theta,\theta}}{R} = m_x \quad (16)$$

- Kesetimbangan momen terhadap sumbu  $\theta$ :

$$Q_\theta - M_{x\theta,x} - \frac{M_{\theta,\theta}}{R} = m_\theta \quad (17)$$

## Hubungan Elastomekanis Silinder Berdinding Tipis Konvensional

Hubungan elastomekanis diturunkan berdasarkan prinsip potensial, di mana variasi pertama seluruh potensial sistem yang merupakan perubahan energi, di mana perubahan bentuk dan energi potensial sama dengan nol. Hubungan elastomekanis silinder berdinding tipis berdasarkan teori momen lentur sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

di mana:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{x\theta} \end{Bmatrix} \left( T + \frac{\Delta T}{h} z \right) dz \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{x\theta} \end{Bmatrix} \left( T + \frac{\Delta T}{h} z \right) z dz \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_\theta \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{C}_{44} & \bar{C}_{45} \\ \bar{C}_{45} & \bar{C}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{\theta x} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

Persamaan yang disajikan sama seperti elastomekanis yang ditunjukkan literatur [1,2,3]. Struktur Laminat tanpa besaran *Koppel*  $C_{16} = C_{26} = K_{16} = K_{26} = D_{16} = 0$  dikenal sebagai struktur *orthotrop*. Apabila struktur lapisan simetris terhadap permukaan tengah, maka akan diperoleh besaran Kwadran *Koppel* sama dengan Nol.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

di mana

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \left( T + \frac{\Delta T}{h} z \right) dz \quad (23)$$

dan:

$$\begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_\theta^T \\ M_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \left( T + \frac{\Delta T}{h} z \right) z dz \quad (24)$$

Hubungan elastomekanis untuk bahan isotrop yaitu:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_x & \mu D_x & 0 \\ \mu D_x & D_x & 0 \\ 0 & 0 & S \\ K_x & \mu K_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu K_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x & \mu D_x & 0 \\ \mu D_x & D_x & 0 \\ 0 & 0 & S \\ K_x & \mu K_x & 0 \\ 0 & 0 & \mu K_x \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

Disini berlaku :

$$\left. \begin{aligned} C_{11} = D_x &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)}; D_{11} = D_{22} = K_\theta = K_x = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \\ G &= \frac{E}{2(1+\mu)}; C_{66} = S = Gh; D_{66} = K_{x\theta} = K_x (1-\mu) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

## Koefisien Perpindahan Panas Suatu Lapisan

Membentuk hubungan elastomekanis dengan meninjau koefisien perpindahan panas lapisan maka mula-mula koefisien perpindahan panas lapisan ditentukan. Untuk menentukan koefisien perpindahan panas tersebut maka mula-mula ditentukan harga kekakuan  $C_{ij}$  dan harga  $\alpha_x$ ,  $\alpha_\theta$  dan  $\alpha_{x\theta}$  masing-masing lapisan.

Suatu lapisan yang terdiri dari berbagai lapis bila dibebani oleh beban termis maka lapisan tersebut tidak saja berubah bentuk pada tetapi juga melengkung dan memuntir. Dalam bentuk sederhana dapat dituliskan sebagai berikut [5].

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & K \\ K & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (27)$$

di mana

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \kappa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_m + \varepsilon_{th} \\ \kappa_m + \kappa_{th} \end{Bmatrix} \quad (28)$$

Untuk menentukan koefisien perpindahan panas laminat bila dimasukkan beban luar sama dengan nol.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{th} \\ \kappa_{th} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C & K \\ K & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} N^T \\ M^T \end{Bmatrix} \quad (29)$$

Koefisien perpindahan panas artinya perpanjangan akibat perubahan suhu persatuan derajat.

Bila koefisien perpindahan panas mengandung suhu yang sama maka berlaku ( $\Delta T^\circ K$  dan  $T = 1^\circ K$ ). Persamaan 27 dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_\theta^T \\ N_{x\theta}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \frac{h_{k+1}}{h_k-1} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k * \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_\theta \\ \alpha_{x\theta} \end{Bmatrix} (T) dz \quad (30)$$

## Hubungan Elastomekanis dengan Meninjau Koefisien Perpindahan Panas Laminat

Hubungan elastomekanis silinder dengan dinding tipis yang meninjau koefisien perpindahan panas laminat sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} & K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & K_{12} & K_{22} & K_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & K_{16} & K_{26} & K_{66} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ K_{12} & K_{22} & K_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ K_{16} & K_{26} & K_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_{xv} T \\ \varepsilon_\theta - \alpha_{\theta v} T \\ \gamma_{x\theta} - \alpha_{x\theta v} T \\ \kappa_x - \kappa_{xv} \Delta T / nt \\ \kappa_\theta - \kappa_{\theta v} \Delta T / nt \\ \kappa_{x\theta} - \kappa_{x\theta v} \Delta T / nt \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Vektor perubahan bentuk merupakan penambahan perubahan bentuk akibat mekanis dan termis. Bila dibaca Persamaan 31 maka terjadi tegangan negatif dan tegangan tarik bila terjadi

penurunan suhu. Bila keduanya bekerja serentak maka perubahan bentuk akan hilang, Bila dibandingkan dengan Persamaan 34. maka perbedaannya terletak pada kolom perubahan bentuk. Kekakuan lapisan tidak berubah. Sehingga perubahan bentuk merupakan superposisi antara perubahan bentuk akibat beban mekanis dan beban termis. Kesahihan persamaan ini dibuktikan kemudian. Bila persamaan dituliskan dengan menggunakan matrik keluwesan maka hubungan elastomekanis dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{S}_{11} & \hat{S}_{12} & \hat{S}_{13} & \hat{S}_{14} & \hat{S}_{15} & \hat{S}_{16} \\ \hat{S}_{12} & \hat{S}_{22} & \hat{S}_{23} & \hat{S}_{24} & \hat{S}_{25} & \hat{S}_{26} \\ \hat{S}_{13} & \hat{S}_{23} & \hat{S}_{33} & \hat{S}_{24} & \hat{S}_{35} & \hat{S}_{36} \\ \hat{S}_{14} & \hat{S}_{24} & \hat{S}_{24} & \hat{S}_{44} & \hat{S}_{45} & \hat{S}_{46} \\ \hat{S}_{15} & \hat{S}_{25} & \hat{S}_{35} & \hat{S}_{45} & \hat{S}_{55} & \hat{S}_{56} \\ \hat{S}_{16} & \hat{S}_{26} & \hat{S}_{36} & \hat{S}_{46} & \hat{S}_{56} & \hat{S}_{66} \end{bmatrix} * \begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \alpha_{xv} T \\ \alpha_{\theta v} T \\ \alpha_{x\theta v} T \\ \kappa_{xv} \Delta T / nt \\ \kappa_{\theta v} \Delta T / nt \\ \kappa_{x\theta v} \Delta T / nt \end{Bmatrix} \quad (32)$$

atau:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_m + \{\varepsilon\}_t \quad (33)$$

## PENYELESAIAN PERSAMAAN SILINDER

Dengan tujuan menurunkan perpindahan matriks suatu keadaan dalam arah tertentu misalnya, dalam kasus ini mengambilnya dalam arah memanjang, maka diturunkan persamaan diferensial dalam arah memanjang sehingga semua besaran dan turunannya dalam arah keliling, di mana suatu keadaan ujung secara lengkap disajikan. Bila arah perpindahan di ambil dalam arah sumbu x, maka persamaan diferensial dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\{U(\theta)\}_x = [A(\theta)]\{U(\theta)\} + \{P(\theta)\} \quad (34)$$

Dari persamaan kesetimbangan, hubungan elastomekanis dan hubungan kinematis berdasarkan teori Momen lentur besaran perpindahan u, v,  $\beta_x$  dan  $\beta_\theta$  dan besaran gaya  $N_x$ ,  $N_{x\theta}$ ,  $M_x$ ,  $Q_x$ ,  $M_{x\theta}$ ,  $N_\theta$  dan  $Q_\theta$  tidak diketahui. Karena arah perpindahan dalam sumbu x, maka besaran keadaan dalam vektor keadaan U berisi.  $\beta_\theta$ ,  $N_\theta$ ,  $M_\theta$  dan  $Q_\theta$  bukan anggota besaran keadaan, karena besaran tersebut tergantung kepada sumbu  $\theta$ . Momen torsi  $M_{x\theta}$  diturunkan dengan menggunakan gaya pengganti Kirchhoff dengan besaran berikut ini:

$$\text{Gaya geser pengganti : } N_{x\theta}^* = N_{x\theta} + \frac{M_{x\theta}}{R} \quad (35)$$

$$\text{Gaya lintang pengganti : } Q_x^* = Q_x + \frac{M_{x\theta\theta}}{R} \quad (36)$$

Dengan demikian vektor keadaan berbunyi sebagai berikut:

$$\{U\} = \{v, u, N_x, N_{x\theta\theta}^*, \beta_x, M_x, Q_x^*\}^T \quad (37)$$

Persamaan diferensial yang diturunkan ditunjukkan dalam Lampiran.

## Perubahan Persamaan Diferensial Parsial Menjadi Persamaan Diferensial Biasa

Untuk mengubah persamaan diferensial parsial yang diturunkan menjadi persamaan biasa maka haruslah Matriks [A] dan {U} hanya tergantung kepada koordinat yang disesuaikan dengan arah koordinat yang dipilih. Untuk mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan biasa digunakan deret *Fourier*. Deret *Fourier* untuk perpindahan dan gaya ditunjukkan pada Persamaan 35, 36 dan 37. Fungsi perpindahan dan aliran gaya, yang dituliskan pada Persamaan 35 merupakan besaran yang tergantung kepada koordinat tangensial ( $\theta$ ) dan aksial ( $x$ ) Untuk mengubah persamaan diferensial parsial tersebut menjadi persamaan biasa maka Matriks [A] dan {U} harus hanya tergantung kepada koordinat yang dipilih. Untuk mengubah persamaan diferensial parsial menjadi persamaan biasa di sini digunakan deret *Fourier*. Deret *Fourier* untuk perpindahan dan gaya ditunjukkan pada Persamaan 35, 36 dan 37. Besaran tanda segitiga merupakan besaran simetri dan tanda gelombang menunjukkan besaran antimetri.

$$\left. \begin{aligned} v(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{v}_m \sin m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{v}_m \cos m\theta \\ u(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{u}_m \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{u}_m \sin m\theta \\ N_x(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_{xm} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{xm} \sin m\theta \\ N_{x\theta}(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_{xm} \sin m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{x\theta} \cos m\theta \\ w(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{w}_m \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{w}_m \sin m\theta \\ \beta_x(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\beta}_{xm} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{\beta}_{xm} \sin m\theta \\ M_x(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{M}_{xm} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{M}_{xm} \sin m\theta \\ Q_x(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{Q}_{xm} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_{xm} \sin m\theta \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Besaran yang bukan merupakan vektor keadaan berlaku sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} N_{\theta}(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{N}_{\theta m} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{N}_{\theta m} \sin m\theta \\ M_{\theta}(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{M}_{\theta m} \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{M}_{\theta m} \sin m\theta \\ Q_{\theta}(x, \theta) &= \sum_{m=0}^{\infty} \hat{Q}_{\theta m} \sin m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{Q}_{\theta m} \cos m\theta \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

dan besaran beban :

$$T(x, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \hat{T}_m \cos m\theta + \sum_{m=0}^{\infty} \tilde{T}_m \sin m\theta \quad (40)$$

di mana  $u_m, v_m, w_m, \dots, T_m$  hanya tergantung kepada  $x$ . Bila deret *Fourier* Persamaan 39 dan Persamaan 40 ataupun turunannya dimasukkan ke dalam persamaan diferensial parsial maka akan diperoleh persamaan biasa. Dengan membandingkan Koefisien bilangan harmonis akan diperoleh sistem persamaan umum untuk setiap besaran bilangan  $m$ , yang sekarang hanya tergantung

kepada Koordinat  $x$ . Persamaan biasa tersebut ditunjukkan pada Persamaan 41 di mana vektor beban  $P$  diambil sebagai kolom tambahan pada matriks diferensial:

$$\begin{Bmatrix} \hat{U}_m \\ \tilde{U}_m \\ 1 \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} \hat{A}_m & \tilde{A}_{m,a} & \hat{P}_m \\ \hat{A}_{m,s} & \tilde{A}_m & \tilde{P}_m \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_m \\ \tilde{U}_m \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

$\hat{U}_m$  = Vektor keadaan simetris

$\tilde{U}_m$  = Vektor keadaan antimetri

$\hat{A}_m$  = Bagian Matriks Diferensial simetris

$\tilde{A}_m$  = Bagian Matriks Diferensial yang Antimetri

$\hat{A}_{m,a}, \tilde{A}_{m,s}$  = Keterkaitan antara  $\hat{U}_m$  dan  $\tilde{U}_m$

Lebih lanjut besaran keadaan dinormalisasi agar mempunyai satuan yang sama. Dengan cara ini maka vektor keadaan dapat digunakan untuk silinder dengan kekakuan dalam arah memanjang atau beban permukaan berbeda. Vektor keadaan pada ke dua ujung juga dapat diperoleh dengan perkalian matriks, karena terdapat suatu kesatuan antara vektor keadaan antar kedua ujung. Besaran keadaan sesudah dilakukan normalisasi sebagai berikut:

$$\{U\}' = \begin{Bmatrix} v_u R_b N_x / C_{11} R_b N_{x\theta} / C_{11} w \\ w_{,x} M_x / R_b^2 C_{11} R_b Q_x / C_{11} \end{Bmatrix} \quad (42)$$

di mana  $\{ \}' = d( ) / d(x/L)$  dan  $L$  panjang silinder.

## Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan biasa yang diperoleh untuk setiap sistem persamaan diferensial biasa tersebut dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + P(x)dx \quad (43)$$

Persamaan diferensial orde pertama dengan konstanta koefisien  $A$  dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = A y \quad (44)$$

Dengan memisahkan faktor pengubah dan mengintegrasikan persamaan berikut ini [4, 5]

$$\frac{dy}{y} = A dx \quad (45)$$

diperoleh penyelesaian umum  $y = C e^{Ax}$  dengan  $C$  sebagai konstanta pilihan yang bebas. Dengan memasukkan kondisi batas  $x = 0$  diperoleh konstanta  $y_0$ . Dengan demikian penyelesaian persamaan homogen dapat dituliskan sebagai berikut:

$$y = e^{Ax} y_0 \quad (46)$$

Hal ini merupakan masalah kondisi batas, yang ditinjau tidak saja pada titik awal tetapi juga pada kondisi akhir Integrasi. Fungsi Matriks yang dimaksud di atas yaitu  $e^{Ax}$  menghasilkan Matrik perpindahan yang diperoleh dari Matrik Diferensial A dengan menggunakan *Iterasi Picard*, di mana Matriks A dengan Koefisien konstan sebagai jumlah suatu deret Matriks yang tak terhingga. Dengan menjumlahkan Matrik tersebut dapat diperoleh sebagai berikut:

$$[W] = e^{Ax} = [I] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} [Ax]^n \quad (47)$$

Dengan mengembangkan Matriks  $e^{Ax}$  diperoleh:

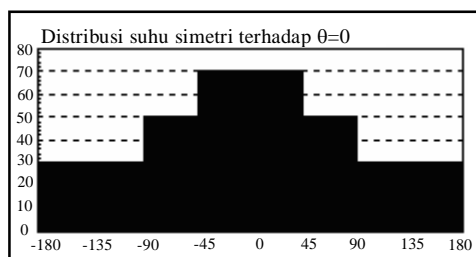
$$\{U\}_1 = [W_o^1] \{U\}_o \quad (48)$$

di mana  $[w_o^1]$  yang dikenal sebagai „Matriks Perpindahan”. Matriks perpindahan  $[w_o^1]$  berarti peubahan besaran vektor keadaan U dari x dari 0 ke 1. Ke dua ujung dihubungkan dengan bantuan matrik perpindahan seluruh daerah.

## PENGUNAAN TEORIDAN PEMBAHASAN

Penyelesaian sistem persamaan diferensial yang tidak homogen (Persamaan 46) misalnya dapat dilakukan dengan memvariasikan Konstanta (*Lagrange*) [6, 7]. Dengan demikian dapat diperoleh penyelesaian sistem persamaan diferensial biasa yang tidak homogen. Dengan cara penyelesaian di atas secara umum deret di atas cepat konvergen. Untuk perhitungan yang ril deret matrik ini akan berhenti sesudah dicapai titik ketelitian yang diberikan. Untuk menghindari kesulitan numeris ini maka struktur di bagi atas elemen kecil. Jumlah elemen dan panjang elemen diperoleh dari pengalaman. Disamping itu untuk menghindari kesulitan itu dapat juga dilakukan dengan menyelesaikan dengan penyelesaian seluruhnya yang secara detail dapat dilihat pada literatur [8].

Untuk membandingkan kedua hubungan elastomekanis maka diambil sebagai kondisi batas atau kedua silinder dijepit. Sebagai uji coba maka diambil laminat dengan susunan  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ ,  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$  dan  $(0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ)_s$ .



Suhu tanpa beban mekanis diambil simetris terhadap sumbu z pada  $\theta = 0$  terhadap keliling.

Fungsi suhu :

$$T(\theta) = 45 + 21,66 \cos \theta + 6,4 \cos 2\theta - 1,3 \cos 3\theta + 0,7458 \cos 5\theta$$

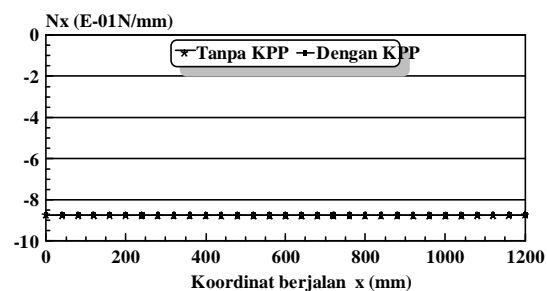
Untuk bahan isotrop dan *orthotrop* maka Persamaan 41 lebih sederhana yaitu:

$$\{\hat{U}_m\}' = [\hat{A}_m] \{\hat{U}_m\} + \{\hat{T}_m\} \quad (49)$$

Persamaan biasa dengan susunan Laminat  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$ ,  $(0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ)_s$  dan  $(25^\circ/50^\circ/75^\circ/100^\circ)$  berbunyi:

$$\begin{Bmatrix} \hat{U}_m \\ \tilde{U}_m \end{Bmatrix}' = \begin{bmatrix} \hat{A}_m & \tilde{A}_{m,a} \\ \hat{A}_{m,s} & \tilde{A}_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{U}_m \\ \tilde{U}_m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \hat{T}_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (50)$$

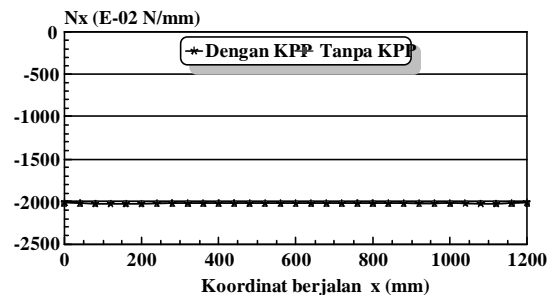
Untuk bahan isotrop maka setiap lapisan mempunyai koefisien perpindahan panas yang sama. Aliran gaya normal disajikan pada Gambar 1.



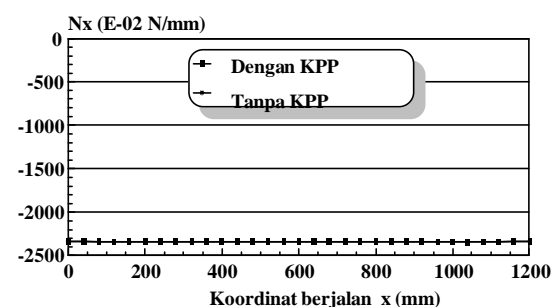
Gambar 1. Aliran gaya normal terhadap panjang dengan dan tanpa koefisien perpindahan panas (Aluminium)

Koefisien perpindahan panas untuk struktur Laminat  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$  adalah  $\alpha_{xv}$  dan  $\alpha_{\theta v}$ . Aliran gaya normal untuk bahan ortotrop diperlihatkan pada Gambar 2. Untuk  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$  dan  $(0^\circ/90^\circ/45^\circ/-45^\circ)_s$  koefisien perpindahan panas yakni  $\alpha_{xv}$ ,  $\alpha_{\theta v}$  dan  $\alpha_{x\theta v}$ .

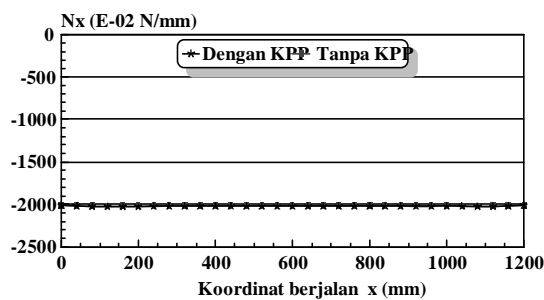
Hasilnya diperlihatkan pada Gambar 3 dan Gambar 4.



Gambar 2. Aliran gaya normal terhadap panjang dengan dan tanpa koefisien perpindahan panas (Serat Karbon dengan susunan  $(0^\circ/90^\circ/90^\circ/0^\circ)$ )



Gambar 3. Aliran gaya normal terhadap panjang dengan dan tanpa koefisien perpindahan panas (Serat Karbon  $(0^\circ/45^\circ/90^\circ)_s$ )



Gambar 4. Aliran gaya normal terhadap panjang dengan dan tanpa koefisien perpindahan panas ((0°/90°/45°/-45°)s)

## KESIMPULAN

Dari Gambar 1 sampai Gambar 4 terlihat bahwa hasil perhitungan berdasarkan kedua hubungan elastomekanis sama. Besaran keadaan pada Laminat yang menggunakan hubungan elastomekanis yang meninjau koefisien perpindahan panas laminat hasilnya sama dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan hubungan elastomekanis konvensional. Bila suhu sama diseluruh tebal dan dicari besaran keadaan pada laminat maka digunakan hubungan elastomekanis yang menggunakan koefisien perpindahan panas sedangkan bila distribusi beban tidak sama sepanjang tebal dan dicari besaran keadaan pada setiap lapis maka digunakan hubungan elastomekanis konvensional. Hubungan elastomekanis konvensional membutuhkan data serat dan matriks sedangkan pada hubungan elastomekanis yang menggunakan koefisien perpindahan panas Laminat maka yang dibutuhkan koefisien perpindahan panas Laminat.

## DAFTARACUAN

- [1]. JONES, *Mechanics of Composite Materials*, International Student Edition, (1975).
- [2]. VINSON, J.R, SIERKOWSKI, R. L, *The Behaviour of Structures Composed of Composite Materials*, Martinus Nijhoff Publisher, (1986).
- [3]. GEIRE, B. *Grundlagen der strukturmechanism Beziehungen von Bauteilen aus Faserverbundwerkstoffen*, Institut für Strukturmechanik, Deutsche Forschungs-und Verbundanstalt für Luft und Raumfahrt, (1986).
- [4]. BRUSH, DON, O., ALMROTH, B.O, *Buckling of bars, Plates and Shells*, International Student Edition, (1975).
- [5]. SCHNEIDER, W, *Wärmeausdehnungskoeffizient und Wärmespannung von Glasfaser Kunststoff-Verbund aus unidirektionalen Schichten*, Kunststoffe Band 61, Heft 4.
- [6]. PESTEL, LECKIE, *Matrix Methods in Elastomechanics*, Mc Graw-Hill New York Company, (1963).

- [7]. COLLATZ, L, *Differentialgleichungen*, Teubner Stuttgart, (1960).
- [8]. SEBAYANG, D, *Ein Beitrag zur Aufstellung und Lösung der statische und stabilitätsleichungen der anisotropen dünnwandigen Zylinderschalen mit Hilfe der Übertragungsmatrizen*, Disertasi di RWTH Aachen, (1996).

## Lampiran

### Persamaan Diferensial Parsial Berdasarkan Teori Momen Lentur

$$\begin{Bmatrix} v \\ u \\ N_x \\ N_x^* \\ w \\ \beta_x \\ M_x \\ M_x^* \\ Q_x \end{Bmatrix}_{,x} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & Y_{15} & Y_{16} & Y_{17} & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} & Y_{25} & Y_{26} & Y_{27} & 0 \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} & Y_{35} & Y_{36} & Y_{37} & 0 \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} & Y_{45} & Y_{46} & Y_{47} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{61} & Y_{62} & Y_{63} & Y_{64} & Y_{65} & Y_{66} & Y_{67} & 0 \\ Y_{71} & Y_{72} & Y_{73} & Y_{74} & Y_{75} & Y_{76} & Y_{77} & 0 \\ Y_{81} & Y_{82} & Y_{83} & Y_{84} & Y_{85} & Y_{86} & Y_{87} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ u \\ N_x \\ N_x^* \\ w \\ \beta_x \\ M_x \\ M_x^* \\ Q_x \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix}$$

Catatan:

Indeks berikut ini 0<sub>3,1</sub>...P<sub>3,9</sub>... Ö<sub>4,13</sub> dan seterusnya maka singkatan. Dia bukan indeks Matriks. Indeks 1<sub>1</sub>, 2<sub>2</sub>,...1<sub>4</sub> menunjukkan garis dan kolom suatu Matriks.

$$Y_{11} = \frac{b_{22}(\cdot, \theta)}{R} - \frac{b_{23}(\cdot, \theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{11} = \frac{b_{21}(\cdot, \theta)}{R}$$

$$Y_{13} = a_{21} \quad ; \quad Y_{14} = a_{22}$$

$$Y_{15} = \frac{b_{21}(\cdot)}{R} - \frac{b_{23}(\cdot, \theta \theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{16} = \frac{b_{24}(\cdot, \theta)}{R}$$

$$Y_{17} = b_{23}$$

$$Y_{21} = \frac{b_{12}(\cdot, \theta)}{R} - \frac{b_{23}(\cdot, \theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{22} = \frac{b_{11}(\cdot, \theta)}{R}$$

$$Y_{23} = a_{11} \quad ; \quad Y_{24} = a_{12}$$

$$Y_{25} = \frac{b_{12}(\cdot, \theta)}{R} - \frac{b_{13}(\cdot, \theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{26} = \frac{b_{14}(\cdot, \theta)}{R}$$

$$Y_{27} = b_{13}$$

$$Y_{31} = O_{3,1}(\cdot, \theta \theta) \quad ; \quad Y_{32} = O_{3,2}(\cdot, \theta \theta)$$

$$Y_{33} = O_{3,3}(\cdot, \theta) \quad ; \quad Y_{34} = O_{3,4}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{35} = O_{3,51}(\cdot, \theta) + O_{3,52}(\cdot, \theta \theta \theta) \quad ; \quad Y_{36} = O_{3,6}(\cdot, \theta \theta)$$

$$Y_{37} = O_{3,7}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{41} = O_{3,1}(\cdot, \theta \theta) \quad ; \quad Y_{42} = O_{3,2}(\cdot, \theta \theta)$$

$$Y_{43} = O_{4,3}(\cdot, \theta) \quad ; \quad Y_{44} = O_{4,4}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{45} = O_{4,51}(\cdot, \theta) + O_{4,52}(\cdot, \theta \theta \theta) \quad ; \quad Y_{46} = O_{4,6}(\cdot, \theta \theta)$$

$$Y_{47} = O_{4,7}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{61} = \frac{b_{32}(\cdot, \theta)}{R} - \frac{b_{33}(\cdot, \theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{62} = \frac{b_{31}(\cdot, \theta)}{R}$$

$$Y_{63} = a_{31} \quad ; \quad Y_{64} = a_{32}$$

$$Y_{65} = \frac{b_{32}(\cdot)}{R} - \frac{b_{33}(\cdot, \theta\theta)}{R^2} \quad ; \quad Y_{66} = b_{34}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{67} = a_{33}$$

$$Y_{71} = -2O_{3,1}(\cdot, \theta\theta) \quad ; \quad Y_{72} = -2O_{3,1}(\cdot, \theta\theta)$$

$$Y_{73} = -2O_{3,3}(\cdot, \theta) \quad ; \quad Y_{74} = -2O_{3,4}(\cdot, \theta)$$

$$Y_{75} = -2\{O_{3,51}(\cdot, \theta) + O_{3,52}(\cdot, \theta\theta\theta)\} \quad ; \quad Y_{76} = -2O_{3,6}(\cdot, \theta\theta)$$

$$Y_{77} = -2O_{3,7}(\cdot, \theta) \quad ; \quad Y_{78} = 1$$

$$Y_{81} = O_{8,11}(\cdot, \theta) + O_{8,12}(\cdot, \theta\theta) \quad ; \quad Y_{82} = O_{8,21}(\cdot, \theta) + O_{8,22}(\cdot, \theta\theta\theta)$$

$$Y_{83} = O_{8,31} + O_{8,31}(\cdot, \theta\theta) \quad ; \quad Y_{84} = O_{8,41} + O_{8,42}(\cdot, \theta\theta)$$

$$Y_{85} = O_{8,51}(\cdot) + O_{8,52}(\cdot, \theta) + O_{8,53}(\cdot, \theta\theta) \quad ; \quad Y_{86} = O_{8,61}(\cdot, \theta) + O_{8,62}(\cdot, \theta\theta\theta)$$

$$Y_{87} = O_{8,71}(\cdot, \theta) + O_{8,72}(\cdot, \theta\theta)$$

{P<sup>T</sup>} beban termis dengan menggunakan hubungan elastomekanis konvensional:

Besaran lain Nol.

$$P_1^T = a_{21} N_x^T + a_{22} N_{x\theta}^{*T} + a_{23} M_x^T$$

$$P_2^T = a_{11} N_x^T + a_{12} N_{x\theta}^{*T} + a_{13} M_x^T$$

$$P_3^T = O_{3,3} N_{x,\theta}^T + O_{3,4} N_{x\theta}^{*T} + O_{3,7} M_{x,\theta}^T + (O_{3,4} + 1) M_{x\theta,\theta}^T$$

$$P_4^T = O_{4,3} N_{x,\theta}^T + O_{4,4} N_{x\theta}^{*T} + O_{4,7} M_{x,\theta}^T + \frac{N_{\theta,\theta}^T}{R} + \frac{M_{\theta,\theta}^T}{R^2}$$

$$P_6^T = a_{31} N_x^T + a_{32} N_{x\theta}^{*T} + a_{33} M_x^T$$

$$P_7^T = 2(O_{3,3} N_{x,\theta}^T + O_{3,4} N_{x\theta}^{*T} + O_{3,7} M_{x,\theta}^T + (O_{3,4} + 1) M_{x\theta,\theta}^T)$$

$$P_8^T = O_{8,31} N_x^T + O_{8,32} N_{x,\theta}^T + O_{8,41} N_{x\theta}^{*T} + O_{8,42} N_{x\theta,\theta}^{*T} + O_{8,71} M_x^T + O_{8,72} M_{x,\theta\theta}^T + \frac{N_{\theta}^T}{R} + \frac{M_{\theta,\theta\theta}^T}{R^2}$$

Beban termis dengan menggunakan Koefisien

Perpindahan Panas Laminat:

$$P_1^T = c_{21} \alpha_{x_v} T + c_{22} \alpha_{\theta_v} T + c_{23} \alpha_{x\theta_v} T + d_{21} \kappa_{x_v} \Delta T/nt + d_{22} \kappa_{\theta_v} \Delta T/nt + d_{23} \kappa_{x\theta_v} \Delta T/nt$$

$$P_2^T = c_{11} \alpha_{x_v} T + c_{12} \alpha_{\theta_v} T + c_{13} \alpha_{x\theta_v} T + d_{11} \kappa_{x_v} \Delta T/nt + d_{12} \kappa_{\theta_v} \Delta T/nt + d_{13} \kappa_{x\theta_v} \Delta T/nt$$

$$P_3^T = P_{3,1} \alpha_{x_v} T_{,\theta} + P_{3,2} \alpha_{\theta_v} T_{,\theta} + P_{3,3} \alpha_{x\theta_v} T_{,\theta} + P_{3,4} \kappa_{x_v} \Delta T/nt + P_{3,5} \kappa_{\theta_v} \Delta T/nt + P_{3,6} \kappa_{x\theta_v} \Delta T/nt$$

$$P_4^T = P_{4,1} \alpha_{x_v} T_{,\theta} + P_{4,2} \alpha_{\theta_v} T_{,\theta} + P_{4,3} \alpha_{x\theta_v} T_{,\theta} + P_{4,4} \kappa_{x_v} \Delta T / nt + P_{4,5} \kappa_{\theta_v} \Delta T / nt + P_{4,6} \kappa_{x\theta_v} \Delta T / nt$$

$$P_6^T = c_{31} \alpha_{x_v} T + c_{32} \alpha_{\theta_v} T + c_{33} \alpha_{x\theta_v} T + d_{31} \kappa_{x_v} \Delta T / nt + d_{32} \kappa_{\theta_v} \Delta T / nt + d_{33} \kappa_{x\theta_v} \Delta T / nt$$

$$P_7^T = -2(P_{3,1} \alpha_{x_v} T_{,\theta} + P_{3,2} \alpha_{\theta_v} T_{,\theta} + P_{3,3} \alpha_{x\theta_v} T_{,\theta} + P_{3,4} \kappa_{x_v} \Delta T / nt + P_{3,5} \kappa_{\theta_v} \Delta T / nt + P_{3,6} \kappa_{x\theta_v} \Delta T / nt)$$

$$P_8^T = P_{8,11} \alpha_{x_v} T + P_{8,21} \alpha_{\theta_v} T + P_{8,31} \alpha_{x\theta_v} T_{,\theta} + P_{8,41} \kappa_{x_v} \Delta T / nt + P_{8,51} \kappa_{\theta_v} \Delta T / nt + P_{8,61} \kappa_{x\theta_v} \Delta T / nt$$

$$P_{8,12} \alpha_{x_v} T_{,\theta\theta} + P_{8,22} \alpha_{\theta_v} T_{,\theta\theta} + P_{8,32} \alpha_{x\theta_v} T_{,\theta\theta} + P_{8,42} \kappa_{x_v} \Delta T_{,\theta\theta} / nt + P_{8,52} \kappa_{\theta_v} \Delta T_{,\theta\theta} / nt + P_{8,62} \kappa_{x\theta_v} \Delta T_{,\theta\theta} / nt$$

Besaran lain Nol

$$O_{3,1} = \frac{1}{R^3} \left\{ K_{16} (b_{12} - \frac{b_{13}}{R}) + K_{66} (b_{22} - \frac{b_{23}}{R}) + D_{16} (b_{32} - \frac{b_{33}}{R}) + K_{26} + \frac{D_{26}}{R} \right\}$$

$$O_{3,2} = (K_{16} b_{11} + K_{66} b_{21} + D_{16} b_{31} + K_{66}) / R^3 \quad ; \quad O_{3,3} = (K_{16} a_{11} + K_{66} a_{21} + D_{16} a_{31}) / R^2$$

$$O_{3,4} = (K_{16} a_{12} + K_{66} a_{22} + D_{16} a_{32}) \quad ; \quad O_{3,51} = (K_{16} b_{12} + K_{66} b_{22} + D_{16} b_{32} + K_{26}) / R^3$$

$$O_{3,52} = (K_{16} b_{13} + K_{66} b_{23} + D_{16} b_{33} - D_{26}) / R^4 \quad ; \quad O_{3,6} = (K_{16} b_{14} + K_{66} b_{24} + D_{16} b_{34} + D_{66}) / R^3$$

$$O_{3,7} = (K_{16} a_{13} + K_{66} a_{23} + D_{16} a_{33}) / R^2$$

$$O_{4,1} = -\frac{1}{R^2} \left\{ (F_{12} + \frac{F_{22}}{R}) + \frac{1}{R} (F_{13} + \frac{F_{23}}{R}) \right\} \quad ; \quad O_{4,2} = -(F_{11} + \frac{F_{21}}{R}) / R^2$$

$$O_{4,3} = -(E_{11} + \frac{E_{21}}{R}) / R \quad ; \quad O_{4,4} = -(E_{12} + \frac{E_{22}}{R}) / R$$

$$O_{4,51} = -(F_{12} + \frac{F_{22}}{R}) / R^2 \quad ; \quad O_{4,52} = -(F_{13} + \frac{F_{23}}{R}) / R^3$$

$$O_{4,6} = -(F_{14} + \frac{F_{24}}{R}) / R^2 \quad ; \quad O_{4,7} = -(E_{13} + \frac{E_{23}}{R}) / R$$

$$O_{8,11} = -(F_{12} + \frac{F_{22}}{R}) / R^2 \quad ; \quad O_{8,12} = -(F_{22} - \frac{F_{23}}{R}) / R^3$$

$$O_{8,21} = F_{11} / R^2 \quad ; \quad O_{8,22} = -F_{21} / R^3$$

$$O_{8,31} = E_{11} / R \quad ; \quad O_{8,32} = -E_{12} / R^2$$

$$O_{8,51} = F_{12} / R^2 \quad ; \quad O_{8,52} = (F_{13} - F_{22}) / R^3$$

$$O_{8,53} = -F_{23} / R^4 \quad ; \quad O_{8,61} = F_{14} / R^2$$

$$O_{8,62} = -F_{24} / R^3 \quad ; \quad O_{8,71} = E_{13} / R$$



$$O_{8,72} = -E_{23}/R^2$$

$$P_{3,1} = (K_{16}c_{11} + K_{66}c_{21} + D_{16}c_{31} - K_{16})/R^2$$

$$; P_{3,2} = (K_{16}c_{12} + K_{66}c_{22} + D_{16}c_{32} - K_{26})/R^2$$

$$P_{3,3} = (K_{16}c_{13} + K_{66}c_{23} + D_{16}c_{33} - K_{66})/R^2$$

$$; P_{3,4} = (K_{16}d_{11} + K_{66}d_{21} + D_{16}d_{31} - D_{16})/R^2$$

$$P_{3,6} = (K_{16}d_{12} + K_{66}d_{22} + D_{16}d_{32} - D_{26})/R^2$$

$$P_{4,1} = -(G_{11} + \frac{G_{21}}{R})/R$$

$$; P_{4,2} = -(G_{12} + \frac{G_{22}}{R})/R$$

$$P_{4,3} = -(G_{13} + \frac{G_{23}}{R})/R$$

$$; P_{4,4} = -(H_{11} + \frac{H_{21}}{R})/R$$

$$P_{4,5} = -(H_{12} + \frac{H_{22}}{R})/R$$

$$P_{8,11} = G_{11}/R$$

$$; P_{8,12} = -G_{21}/R^2$$

$$P_{8,21} = G_{12}/R$$

$$; P_{8,22} = -G_{22}/R^2$$

$$P_{8,31} = G_{13}/R$$

$$; P_{8,41} = H_{11}/R$$

$$P_{8,42} = H_{21}/R^2$$

$$; P_{8,51} = H_{12}/R$$

$$P_{8,52} = -H_{22}/R^2$$

$$; P_{8,51} = -H_{13}/R$$

$$P_{8,62} = H_{23}/R^2$$

Besaran lain Nol.

Di mana:

$$B = \begin{bmatrix} C_{16} & C_{12} & -K_{12} & K_{16} \\ C_{66} + \frac{K_{66}}{R} & C_{26} + \frac{K_{26}}{R} & K_{26} - \frac{K_{26}}{R} & K_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ K_{16} & K_{12} & -D_{12} & D_{16} \end{bmatrix}$$

$$\ddot{A} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{16} & K_{11} \\ C_{16} + \frac{K_{16}}{R} & C_{66} + \frac{K_{16}}{R} & K_{16} + \frac{D_{16}}{R} \\ K_{11} & K_{16} & D_{11} \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{16} + \frac{K_{16}}{R} & C_{26} + \frac{K_{26}}{R} & C_{66} + \frac{K_{66}}{R} \\ K_{11} & K_{12} & K_{16} \end{bmatrix}$$

*Aliran Gaya Normal Akibat Beban Temperatur dengan Menggunakan Hubungan Elastomekanis yang Meninjau Koefisien Perpindahan Panas Laminat (Darwin Sebayang)*

$$d = - \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{16} + \frac{D_{16}}{R} & K_{26} + \frac{D_{26}}{R} & K_{66} + \frac{D_{66}}{R} \\ D_{11} & D_{12} & D_{16} \end{bmatrix}$$

$$e = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{26} & K_{21} \\ K_{21} & K_{26} & D_{21} \end{bmatrix}$$

$$f = \begin{bmatrix} C_{26} & C_{22} & K_{22} & K_{26} \\ K_{26} & -K_{22} & D_{22} & D_{26} \end{bmatrix}$$

$$g = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \end{bmatrix}$$

$$I_{ik} = \begin{bmatrix} C_{21} & C_{22} & C_{26} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \end{bmatrix}$$

$$a_{il} = \ddot{A}_{il}^{-1}$$

$$b_{ik} = \ddot{A}_{il}^{-1} B_{lk}$$

$$E_{ij} = e_{ik} a_{kj}$$

$$F_{il} = e_{ik} b_{kl} + f_{il}$$

$$G_{ij} = e_{ik} c_{kj} - g_{ij}$$

$$H_{ij} = e_{ik} d_{kj} - h_{ij}$$

$i=1 \text{ sampai } 3, j=1 \text{ sampai } 3, k=1 \text{ sampai } 4, l=1 \text{ sampai } 3 \text{ dan } m=1 \text{ sampai } 2$